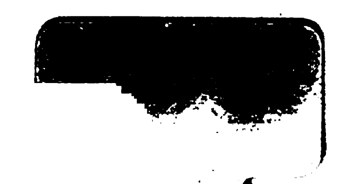


Die Kugelfunktion als Lösung einer Differenzengleichung.

Von

Professor Dr. Karl Baer,
Direktor.

Wissenschaftliche Beilage zu dem Jahresbericht über die Realschule in Kiel.



Kiel, 1898.
Druck von A. F. Jensen.

1898. Progr. Nr. 313.

Die Kugelfunktion als Lösung einer Differenzengleichung.

In seinem Mémoire sur les Fonctions de Legendre[1]) gelangt H. Laurent durch Anwendung eines Satzes von Cauchy aus der Residuenrechnung zu dem Ergebnis, dass die Kugelfunktion $\overset{n}{P}(x)$, der Koefficient in der Entwickelung von

$$T = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xu + u^2}}$$

nach Potenzen von u, gleich ist dem Integrale

$$\frac{1}{2i\pi} \int T \, . \, u^{\overset{n}{}} du,$$

wenn die Integration über einen um den Anfangspunkt beschriebenen Kreis ausgedehnt wird, dessen Radius kleiner ist als $\mathcal{M}(x \pm \sqrt{x^2 - 1})$. An Stelle des Kreisintegrales kann das doppelte Integral auch über eine gerade Linie genommen werden, welche die beiden Punkte $x \pm \sqrt{x^2 - 1}$ mit einander verbindet.

Merkwürdiger Weise steht das so einfache Integral in dem Handbuch der Kugelfunktionen von E. Heine[2]) nicht im Vordergrunde der Untersuchung. Aber auch in neueren Werken, z. B. dem Werke von Byerly[3]), wird es nicht erwähnt. Dagegen bildet es den Ausgangspunkt einer umfangreichen Abhandlung von L. Schläfli[4]), der es auch auf $\overset{n}{Q}(x)$, die Kugelfunktion zweiter Art, überträgt und dabei krummlinige Integrationswege in ausgedehntem Masse verwendet.

In der vorliegenden Abhandlung möchte ich die Aufmerksamkeit von neuem auf die interessante, aber, wie es scheint, wenig bekannt gewordene Form der Kugelfunktionen lenken. Ausgehend von der sowohl für $\overset{n}{P}(x)$ wie für $\overset{n}{Q}(x)$ geltenden Rekursionsformel, die mit einer linearen Differenzengleichung zweiter Ordnung gleichbedeutend ist, zeige ich zunächst, wie man zu der angedeuteten Integralform gelangt, indem man die von Laplace[5]) gegebene Integrationsmethode zur Anwendung bringt.

Nach einer ausführlichen Diskussion der Integrale folgt dann in den weiteren Abschnitten die Integration der Differenzengleichung durch Potenzreihen, ferner die Aufsuchung eines zweiten Integrals derselben durch eine einfache Summation, endlich die Transformation gegebener Potenzreihen in Reihen, welche nach Kugelfunktionen fortschreiten.

---

[1]) Liouville: Journal de Math., III. Sèrie. Tome I. 1875. (Novembre.)

[2]) E. Heine: Handbuch der Kugelfunktionen. Berlin. Bd. I. 1878, Bd. II. 1881. M. vergl. z. B. I. S. 37, II. S. 222 und 227.

[3]) W. E. Byerly: An elementary Treatise on Fourier's Series etc. Boston, U. S. A., 1895.

[4]) L. Schläfli: Über die zwei Heine'schen Kugelfunktionen mit beliebigem Parameter und ihre ausnahmslose Darstellung durch bestimmte Integrale. Bern. 1881.

[5]) Laplace: Théorie analytique des Probabilités, pp. 121, 135 oder Oeuvres VII. M. vergl. George Boole: A Treatise on the calculus of finite differences. London. 1880. p. 257.

Von einer Darstellung der Kugelfunktionen durch mehrfache Differentialquotienten, auf welche die von Spitzer angegebene Integrationsmethode der Differenzengleichungen führt, musste, um den gebotenen Raum nicht zu überschreiten, Abstand genommen werden.

§ 1.

Integration der Differenzengleichung durch bestimmte Integrale.

Die zuerst von Gauss[1]) gefundene Rekursionsformel

$$(1)\qquad (n+2)\,R^{n+2}(x) - (2n+3)\,x\,R^{n+1}(x) + (n+1)\,R^{n}(x) = 0$$

giebt, wenn $R^n(x)$ entweder $P^n(x)$ oder $Q^n(x)$ bedeutet, den Zusammenhang von drei Kugelfunktionen an, deren Parameter sich um eine oder zwei reelle Einheiten unterscheiden. Die Gleichung ermöglicht daher die Berechnung einer jeden Kugelfunktion, falls der Verlauf derselben in einem zwei Einheiten umfassenden Bereiche, etwa von $n = -1$ bis $n = +1$, gegeben ist. Am einfachsten und natürlichsten fällt die Rechnung aus, wenn n eine ganze positive Zahl vorstellt und als Anfangswerte, wie es üblich ist,

für jedes x $\qquad P^0(x) = 1, \qquad P^1(x) = x,$

für $x^2 < 1$ $\qquad Q^0(x) = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}, \qquad Q^1(x) = -1 + \frac{x}{2}\log\frac{1+x}{1-x},$

für $x^2 > 1$ $\qquad Q^0(x) = \frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1}, \qquad Q^1(x) = -1 + \frac{x}{2}\log\frac{x+1}{x-1}$

genommen werden. Der Grösse n wird aber auch ein beliebiger, reeller oder komplexer Wert beigelegt werden können. So kann beispielsweise die Berechnung von $P^{\nu+\frac{1}{2}}(\cos\vartheta)$ auf die Mehlersche Kegelfunktion, die übrigens bis auf die Konstante mit dem vollständigen elliptischen Integral erster Gattung übereinstimmt,

$$\mathfrak{K}^0(\cos\vartheta) = P^{-\frac{1}{2}}(\cos\vartheta) = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, k^2\right) = \frac{2}{\pi}K, \qquad k = \sin\frac{\vartheta}{2},$$

und diejenige von $P^{\nu\pm\mu i}(x)$, falls ν die Hälfte einer ungeraden Zahl ist, auf die allgemeine Kegelfunktion

$$\mathfrak{K}^{\mu}(x) = P^{-\frac{1}{2}\pm\mu i}(x) = F\left(\frac{1}{2}+\mu i, \frac{1}{2}-\mu i, 1, \frac{1-x}{2}\right)$$

zurückgeführt werden.

Um die Rekursionsformel zunächst auf die gewöhnliche Form einer Differenzengleichung zu bringen, beachten wir, dass, $\Delta n = 1$ gesetzt,

$$\Delta R^n(x) = R^{n+1}(x) - R^n(x),$$
$$\Delta^2 R^n(x) = R^{n+2}(x) - 2R^{n+1}(x) + R^n(x)$$

ist, und führen die Werte von $R^{n+1}(x)$ und $R^{n+2}(x)$ in die Gleichung (1) ein. Dadurch erhalten wir, wenn zur Abkürzung $R^n(x) = z$ gesetzt wird,

$$(1a)\qquad (2+n)\,\Delta^2 z + [(4-3x) + 2(1-x)n]\,\Delta z + [3(1-x) + 2(1-x)n]\,z = 0.$$

[1]) Gauss: Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi. No. 19.

Dies ist eine lineare Differenzengleichung zweiter Ordnung, deren Integrale nun nach der von Laplace gegebenen Methode aufgesucht werden sollen.

Wir machen für z den Ansatz

$$z = \int_a^b u^n . f(u)\, du$$

und versuchen $f(u)$ als Funktion von u (und x) so zu bestimmen, dass das Integral, zwischen den von n unabhängig gedachten Grenzen a und b genommen, die Gleichung erfüllt. Setzen wir mit Laplace

$$u^n = p, \quad nu^n = u\frac{dp}{du}, \quad \text{also } z = \int_a^b p . f(u)\, du,$$

so wird

$$\Delta z = \int_a^b p\,(u-1) . f(u)\, du\,, \quad \Delta^2 z = \int_a^b p\,(u-1)^2 . f(u)\, du\,,$$

und es ergiebt sich, wenn diese Werte in (1a) eingesetzt werden,

$$\int_a^b \left\{ Ap + B\frac{dp}{du} \right\} . f(u)\, du = 0\,,$$

wo

$$A = 2\,u^2 - 3\,xu + 1\,, \quad B = u^3 - 2\,xu^2 + u.$$

Wir integrieren gliedweise und wenden auf das zweite Integral die Integration durch Teile an. Dann folgt

(a)
$$\int_a^b p \left\{ A . f(u) - \frac{d\,(B . f(u))}{du} \right\} du + \Big| p\, B . f(u) \Big|_a^b = 0.$$

Da $f(u)$, ebenso wie a und b, von n, das allein in p vorkommt, unabhängig ist, so sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für das Bestehen der Gleichung (a), was auch p sei,

(b)
$$A . f(u) - \frac{d\,(B . f(u))}{du} = 0,$$

(c)
$$\Big| p\, B . f(u) \Big|_a^b = 0.$$

Hinreichend sind diese Bedingungen, weil durch sie in der That die Gleichung (a) zu einer identischen gemacht wird. Sie sind aber auch notwendig. Denn wäre die linke Seite von (b) von 0 verschieden, so könnte man, da die Gleichung (a) unabhängig von p bestehen soll, und unter der Voraussetzung, dass p und $\frac{dp}{du}$ innerhalb der zwar noch unbekannten, aber nach n konstanten Grenzen kontinuierlich bleiben, p einen solchen Wert zuerteilen, dass es für jedes u mit (b) dasselbe Zeichen hat, wenn die linke Seite von (c) positiv oder 0 ist, dass es dagegen mit (b) verschiedenes Zeichen hat, wenn (c) negativ sein sollte. Im ersteren Falle würde die linke Seite von (a) ein positives, im letzteren Falle ein negatives Vorzeichen erhalten. Da sie aber 0 sein soll, so muss auch (b) im allgemeinen, d. h. von einzelnen Punkten des Integrationsweges abgesehen, verschwinden, woraus folgt, dass auch (c) gleich 0 ist. Es ist unnötig, den zweiten Fall, in welchem p und seine Ableitung an einer Stelle $u = c$, $a < c < b$, eine Diskontinuität besitzt, weiter zu er-

örtern, da p und $\frac{dp}{du}$ nur für $u = \infty$ aufhören kontinuierlich zu sein, dieser Wert aber, wie sich zeigen wird, keine gesuchte Grenze sein kann.

Von den Gleichungen (b) und (c) dient die erste zur Bestimmung der Funktion $f(u)$, die zweite zur Auffindung der Grenzen a und b. Aus (b) folgt, falls c eine Konstante bedeutet,

$$f(u) = \frac{c}{\sqrt{1 - 2xu + u^2}}.$$

Damit Gleichung (c) erfüllt werde, muss

$$pB . f(u) = cu^{n+1} \sqrt{1 - 2xu + u^2} = 0$$

gesetzt werden. Daraus ergeben sich, wenn der reelle Teil von $(n + 1)$ grösser als 0 vorausgesetzt wird, als Grenzen des Integrales z die Werte

$$u = 0, \quad u = x - \sqrt{x^2 - 1} = \xi, \quad u = x + \sqrt{x^2 - 1} = 1 : \xi.$$

Folglich genügen die drei Integrale

$$(2) \qquad z_1 = c_1 \int_0^{\xi} \frac{u^n du}{\sqrt{1 - 2xu + u^2}}, \quad z_2 = c_2 \int_{\xi}^{1:\xi} \frac{u^n du}{\sqrt{1 - 2xu + u^2}}, \quad z_3 = c_3 \int_0^{1:\xi} \frac{u^n du}{\sqrt{1 - 2xu + u^2}}$$

der Differenzengleichung (1 a). Man kann die Integrale z_1 und z_2 als partikuläre Lösungen ansehen, während das dritte Integral ein Aggregat vorstellt, das die beiden ersten vereinigt. Die allgemeine Lösung der Gleichung giebt der Ausdruck

$$z = \varkappa_1 z_1 + \varkappa_2 z_2,$$

in welchem $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ in Bezug auf n periodische, d. h. solche Funktionen sind, welche der Differenzengleichung $\Delta\varphi(n) = 0$ oder $\varphi(n + 1) = \varphi(n)$ Genüge leisten. Demnach hat nach Boole [1]) jedes $\varkappa$ die Form

$$\varkappa = C + \sum_m (A_m \cos 2 mn\pi + B_m \sin 2 mn\pi),$$

falls C, A_m, B_m willkürliche, von n unabhängige Grössen bedeuten, m dagegen positiv und ganz ist. Für eine ganze Zahl n wird $\varkappa$ zu einer Konstanten. Ein besonders einfacher Wert für $\varkappa$ ist $ctg\, n\pi$, und diese Grösse [2]) spielt in der That, wie aus der Arbeit von Schläfli hervorgeht, bei den Eigenschaften der Kugelfunktionen mit beliebigem Parameter n eine wichtige Rolle.

Aus dem Bisherigen folgt nur, dass die Integrale z Kugelfunktionen sind. Wir müssen daher entscheiden, welches z die Funktion $P^n(x)$ und welches $Q^n(x)$ darstellt. Um Weitläufigkeiten zu vermeiden, möge vorläufig der Weg, über welchen die Integrationen in z_1 und z_2 zu erstrecken sind, als reell angenommen werden. Wir erreichen dies dadurch, dass wir uns unter u eine reelle Veränderliche und unter x eine reelle Grösse denken, deren absoluter Wert grösser ist als die Einheit. Ferner setzen wir fest, dass die Quadratwurzel des Nenners immer mit demselben, etwa dem positiven Zeichen genommen werden soll. Dann wird $f(u)$ sowohl von $u = 0$ bis $u = \xi - \varepsilon$

[1]) S. Boole a. a. O. S. 81.

[2]) Mit Benutzung des Wertes

$$ctg\, n\pi = \frac{\Pi(-n) \cdot \Pi(n-1)}{\Pi\left(-\frac{1}{2}+n\right) \cdot \Pi\left(-\frac{1}{2}-n\right)}$$

überzeugt man sich leicht, dass auch die Funktion $F(n) = ctg\, n\pi \,.\, P^n(x)$ der Rekursionsformel genügt. Für $F(n)$ hat Schläfli (a. a. O. S. 18) den Wert $F(n) = \frac{1}{\pi}\left(Q^n(x) - Q^{-n-1}(x)\right)$ gefunden. Natürlich darf hierbei n nicht 0 oder ganz sein.

wie von $u = \xi + \varepsilon$ bis $u = 1 : \xi - \eta$ nicht nur stetig sein, sondern auch das Zeichen nicht ändern. Da ferner auch u^n in den bezeichneten Intervallen, den Fall $n = \infty$ ausgeschlossen, eine stetige Funktion ist, so folgt mit Anwendung des ersten Mittelwertsatzes

$$z_1 = c_1 \int_0^{\xi - \varepsilon} \frac{u^n du}{\sqrt{1 - 2xu + u^2}} = c_1 \left(x - \sqrt{x^2 - 1} - \varepsilon\right)^n \vartheta^n \int_0^{\xi - \varepsilon} \frac{du}{\sqrt{1 - 2xu + u^2}},$$

$$z_2 = c_2 \int_{\xi + \varepsilon}^{1 : \xi - \eta} \frac{u^n du}{\sqrt{1 - 2xu + u^2}} = c_2 \left[x + \varepsilon - (\varepsilon + \eta)\vartheta - (1 - 2\vartheta)\sqrt{x^2 - 1}\,\right]^n \int_{\xi + \varepsilon}^{1 : \xi - \eta} \frac{du}{\sqrt{1 - 2xu + u^2}},$$

falls ϑ einen positiven echten Bruch bezeichnet. Nehmen nun nach Ausführung der Integration ε und η zu 0 ab, so folgt

$$z_1 = c_1 \left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)^n \vartheta^n . \frac{1}{2} \log \frac{x + 1}{x - 1}, \quad z_2 = c_2 \left[x - (1 - 2\vartheta)\sqrt{x^2 - 1}\,\right]^n \log(-1).$$

Also wird, wenn sich x der Grenze 1 nähert, z_1 unendlich gross, während z_2 endlich bleibt. Dieselben Eigenschaften sind aber für die beiden Arten der Kugelfunktionen charakteristisch. Mithin führt z_1 auf $Q^n(x)$ und z_2 auf $P^n(x)$. Demnach ergeben sich, wofern die Konstanten c_1 und c_2 so bestimmt werden, dass für $n = 0$

$$z_1 = Q^0(x) = \frac{1}{2} \log \frac{x + 1}{x - 1}, \quad z_2 = P^0(x) = 1$$

ist, schliesslich die Formeln

$$(3) \qquad Q^n(x) = \int_0^{x - \sqrt{x^2 - 1}} \frac{u^n du}{\sqrt{1 - 2xu + u^2}}, \quad P^n(x) = \frac{1}{i\pi} \int_{x - \sqrt{x^2 - 1}}^{x + \sqrt{x^2 - 1}} \frac{u^n du}{\sqrt{1 - 2xu + u^2}}.$$

§ 2.

Darstellung der Kugelfunktion als Periode einer gewissen Funktion *u*.

Die Integralformeln des ersten Abschnitts sind unter der Voraussetzung abgeleitet worden, dass u eine reelle Veränderliche, $x^2 > 1$ und der reelle Teil von $(n + 1)$ grösser als 0 ist. Sie besitzen aber nach den Darlegungen von Schläfli auch dann noch Geltung, wenn die genannten Grössen keinerlei Beschränkungen unterworfen werden, wofern nur bei komplexem u die Integrationswege richtig gewählt sind.

Was zunächst die Integrationsgrenzen betrifft, so fällt ihre Lage sehr verschieden aus. Ist x reell, positiv und grösser als 1, so mag $x = \mathfrak{Cos}\,\vartheta$, $\sqrt{x^2 - 1} = \mathfrak{Sin}\,\vartheta$, $\vartheta > 0$, gesetzt werden. Dann ist $\xi = x - \sqrt{x^2 - 1} = e^{-\vartheta}$ kleiner als 1 und $1 : \xi = x + \sqrt{x^2 - 1} = e^{\vartheta}$ grösser als 1. Die Grenzen 0, ξ, $1 : \xi$ liegen also sämtlich auf der positiven Hälfte der reellen Achse. Für ein positives und reelles x dagegen, welches kleiner als die Einheit ist, sei $x = \cos\omega$ und $\sqrt{x^2 - 1} = i \sin\omega$, $0 < \omega < \frac{1}{2}\pi$. Da dann $\xi = e^{-i\omega}$, $1 : \xi = e^{i\omega}$ wird, so sind diese Werte komplex konjugiert und liegen auf dem Kreise, der den Nullpunkt zum Mittelpunkte und die Einheit zum Radius hat. Endlich kann x selbst komplex und mit einem positiven reellen Teile versehen sein. In diesem Falle

sind die Werte von ξ und $1:\xi$ zwar ebenfalls komplex, aber nicht mehr konjugiert. Denn falls etwa $x = \cos(\omega - i\vartheta)$, $-\frac{1}{2}\pi < \omega < \frac{1}{2}\pi$, ϑ nicht negativ, gesetzt wird, so folgt $\sqrt{x^2 - 1} = i \sin(\omega - i\vartheta)$ und mithin $\xi = e^{-\vartheta}(\cos\omega - i\sin\omega)$, $1:\xi = e^{\vartheta}(\cos\omega + i\sin\omega)$. ξ liegt also innerhalb, $1:\xi$ ausserhalb des Einheitskreises. Der Fall eines negativen x wird weiter unten zu erwähnen sein.

Nun ist in dem Integral

$$z = \int u^n f(u)\, du\,, \quad f(u) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xu + u^2}}\,,$$

$f(u)$ eine zweideutige Funktion, welche die beiden Verzweigungspunkte $u = \xi$ und $u = 1:\xi$ besitzt, die zugleich Unstetigkeitspunkte sind. Ausserdem wird der Integrand wegen der Potenz u^n im Punkte $u = 0$ von der n^{ten} Ordnung 0; hier verliert u^n den Charakter einer ganzen Funktion, sobald n weder 0 noch eine positive und ganze Zahl ist. Endlich ist das Vorhandensein des im Unendlichen liegenden Unstetigkeitspunktes in Betracht zu ziehen.

Alle diese Umstände müssen bei der Auswahl der Integrationswege berücksichtigt werden, wenn brauchbare Resultate erzielt werden sollen. Da es jedoch hier nicht der Ort ist, eine allgemeine Untersuchung des Integrales z zu geben, so werden wir uns auf einige wichtige Eigenschaften desselben beschränken. Vor allem aber müssen wir davon absehen, dass dem Parameter n in jedem Falle ein beliebiger Wert beigelegt wird.

Von wesentlicher Bedeutung sind die beiden kritischen Punkte $u = \xi$ und $u = 1:\xi$. Man überzeugt sich leicht, dass das Integral z, genommen von einem in der Umgebung eines der beiden Verzweigungspunkte liegenden Punkte bis zu diesem Verzweigungspunkte selbst, einen endlichen Wert besitzt, dass also das Integral in der Nähe eines kritischen Punktes nicht ohne Bedeutung ist.

Wegen der Zweideutigkeit der Funktion $f(u)$ werden wir uns die Werte von u auf einer aus zwei Blättern bestehenden und im Unendlichen geschlossenen Fläche aufgetragen denken und diese Fläche durch einen von $u = \xi$ bis $u = 1:\xi$ in gerader Richtung verlaufenden Verzweigungsschnitt zu einer einfach zusammenhängenden gestalten. Auf dieser Fläche lassen sich drei Arten von geschlossenen Linien ziehen, die immer eine vollständige Begrenzung geben: solche, die beide Verzweigungspunkte, solche, die nur einen, und solche, die keinen derselben umgeben. Die erste und dritte Art sind im wesentlichen nicht verschieden, da die geschlossene Linie als Begrenzung des inneren oder des äusseren Teiles der Fläche angesehen werden kann. Indes muss eine nur einen Verzweigungspunkt umgebende geschlossene Linie diesen Punkt zweimal umlaufen, wenn sie eine vollständige Begrenzung bilden soll. Je nachdem nun die im übrigen willkürlichen Integrationswege beide Verzweigungspunkte oder nur einen von ihnen umschliessen, führt die Untersuchung des Integrales z im allgemeinen entweder auf $P^n(x)$ oder auf $Q^n(x)$.

Betrachten wir nun für einen Wert von x, der reell und kleiner als 1 oder komplex ist, das Integral

$$z = \int u^n f(u)\, du\,,$$

in positivem Sinne hinerstreckt über eine beliebige, geschlossene Linie, welche beide Verzweigungspunkte im ersten oder im zweiten Blatte umgiebt, so soll festgesetzt werden, dass im ersten Blatte auf dem linken (positiven) Ufer des Verzweigungsschnittes die Quadratwurzel und also auch die zu integrierende Funktion ihr positives Vorzeichen habe. Lässt man dann die geschlossene Linie

im ersten Blatte verlaufen, so kann man dieselbe bis in die unmittelbare Nähe des Verzweigungsschnittes zusammenziehen. Dadurch zerfällt das Integral z in vier Integrale. Das erste von ihnen ist über eine Gerade längs des Verzweigungsschnittes auf dem rechten Ufer, also mit negativem Funktionswert, von $u=\xi$ bis $u=1:\xi$, das dritte über eine Gerade ebenfalls längs des Verzweigungsschnittes, aber in umgekehrter Richtung und auf dem linken Ufer, also mit positivem Funktionswert von $u=1:\xi$ bis $u=\xi$ zu nehmen. Das zweite und das vierte Integral können als Kreisintegrale angesehen werden, welche in der Richtung der wachsenden Winkel um die Endpunkte des Verzweigungsschnittes und in beliebiger Nähe derselben erstreckt werden. Diese Kreisintegrale sinken, wie man bemerkt, unter jeden beliebigen Grad der Kleinheit herab, sobald ihre Radien zum Verschwinden gebracht werden. Daher hat man

$$z=\int\limits_{\xi}^{1:\xi}[-u^n f(u)]\,du+\int\limits_{1:\xi}^{\xi}[+u^n f(u)]\,du=-2\int\limits_{\xi}^{1:\xi}u^n f(u)\,du=-2\,.\,\mathfrak{J}\,(\xi,\ 1:\xi).$$

Genau in derselben Weise ergiebt sich, wenn die Integration über eine im zweiten Blatte verlaufende und den Verzweigungsschnitt umgebende geschlossene Linie vollzogen wird,

$$z=+2\int\limits_{\xi}^{1:\xi}u^n f(u)\,du=+2\,.\,\mathfrak{J}\,(\xi,\ 1:\xi).$$

Bezeichnen wir nun den Wert des über die Gerade längs des Verzweigungsschnittes ausgedehnten Integrales $\mathfrak{J}$ mit $i\pi\,P^n(x)$, setzen also je nach der Wahl des Blattes

$$z=\mp 2\,i\pi\,P^n(x),$$

so ist die Funktion $P^n(x)$ vollständig bestimmt, weil die Veränderliche u ein gegebenes Intervall auf gegebene Art durchläuft.

Die Art der Behandlung des Integrales z zeigt, dass der Ausdruck $2\,i\pi\,P^n(x)$ aufgefasst werden darf als die Periode einer gewissen Funktion u, nämlich der inversen Funktion des Integrales $\mathfrak{J}$, welche durch Auflösung der Gleichung

$$\mathfrak{J}=\int\limits_0^u u^n f(u)\,du$$

nach der oberen Grenze u, die mit keinem der ausgezeichneten Punkte zusammenfällt, gewonnen werden kann.

Die Periode $2\,i\pi\,P^n(x)$ lässt sich aber auch auf eine andere Weise darstellen. Der allgemeinste Weg nämlich, der vom Nullpunkte nach dem beliebigen Punkte u führt, besteht offenbar, wenn wir zunächst wieder im ersten Blatte der u-Fläche bleiben, darin, dass die Variable u die Elementarkonturen, die von 0 aus um die Verzweigungspunkte gelegt werden, beliebig oft in positivem Sinne durchläuft und dann geradlinig vom Nullpunkt aus nach dem Punkte u geht. Setzt man dem Obigen entsprechend fest, dass die zu integrierende Funktion von $u=0$ mit positivem Werte ausgeht, so darf, wie ersichtlich ist, das längs der Elementarkontur um $u=\xi$ hinerstreckte Integral $\mathfrak{J}\,(\xi)$ gleich dem Doppelten des geradlinigen Integrales von $u=0$ bis $u=\xi$ gesetzt werden. Es ist also

$$\mathfrak{J}(\xi) = +2\int_0^{\xi} u^n f(u)\,du.$$

Entsprechend wird das Integral über die Elementarkontur um $u = 1 : \xi$

$$\mathfrak{J}(1:\xi) = -2\int_0^{1:\xi} u^n f(u)\,du,$$

weil jetzt, d. h. nach der Zurücklegung der Elementarkontur um $u = \xi$, mit negativem Funktionswerte vom Nullpunkt ausgegangen wird. — Für im zweiten Blatte verlaufende Elementarkonturen würden sich Werte ergeben, die sich von denen des ersten Blattes nur durch die Vorzeichen unterscheiden.

Die geradlinigen Integrale bezeichnen wir nun mit $Q^n(x)$ und $Q_1^n(x)$, indem wir

$$\mathfrak{J}(\xi) = \pm 2\,Q^n(x),\ \mathfrak{J}(1:\xi) = \mp 2\,Q_1^n(x)$$

setzen. Bekannte Schlüsse führen dann zu dem Ergebnis, dass die zu $\mathfrak{J}$ inverse Funktion u die Periode $\mathfrak{J}(\xi) + \mathfrak{J}(1:\xi)$ hat. Also müssen, da u nur einfach periodisch sein kann, beide für die Periode gefundenen Ausdrücke einander gleich sein. So ergiebt sich die Gleichung

$$Q_1^n(x) - Q^n(x) = i\pi\,P^n(x), \tag{4}$$

deren Richtigkeit sich auch unmittelbar durch Vertauschung der Integrationswege erkennen lässt.

Diese Formel bleibt auch dann noch richtig, wenn x reell und grösser als 1 ist, obwohl dieser Fall bei der Ableitung ausgeschlossen wurde. Man hat nur darauf zu achten, dass die Stelle $u = \xi$, welche für $x > 1$ mit den Punkten $u = 0$ und $u = 1 : \xi$ in gerader Linie liegt, in passender Weise, etwa durch einen Halbkreis, dessen Radius schliesslich verschwindet, ausgeschlossen wird.

§ 3.

Umformung der Integrale.

In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, wie durch Einführung von neuen Veränderlichen oder durch Abänderung der Integrationswege die üblichen Formen der Kugelfunktionen aus den früheren Integralformeln abgeleitet werden können.

a. Den Formeln

$$P^n(x) = \frac{1}{i\pi}\int_{x-\sqrt{x^2-1}}^{x+\sqrt{x^2-1}} \frac{u^n\,du}{\sqrt{1-2xu+u^2}},\quad Q^n(x) = \int_0^{x-\sqrt{x^2-1}} \frac{u^n\,du}{\sqrt{1-2xu+u^2}} \tag{3}$$

sind zunächst diejenigen Integrale an die Seite zu stellen, welche durch die Substitution von $\frac{1}{u}$ an Stelle von u aus jenen erhalten werden. Da die Grenzen ξ und $1 : \xi$ ihre Rollen vertauschen, so ergiebt sich

$$P^n(x) = \frac{1}{i\pi}\int_{x-\sqrt{x^2-1}}^{x+\sqrt{x^2-1}} \frac{u^{-n-1}\,du}{\sqrt{1-2xu+u^2}},\quad Q^n(x) = \int_{x+\sqrt{x^2-1}}^{\infty} \frac{u^{-n-1}\,du}{\sqrt{1-2xu+u^2}}. \tag{5}$$

Mithin ist allgemein

(6) $$P^{n}(x) = P^{-n-1}(x),$$

während der Zusammenhang zwischen $Q^{n}(x)$ und $Q^{-n-1}(x)$ (vergl. Anmerk. 2) auf S. 4) nicht so einfacher Art ist.

b. Für solche Werte von x, die reell und grösser als 1 sind, darf $u = e^{\alpha}$ gesetzt werden. Man findet mit Anwendung der Formeln (5)

(7) $$P^{n}(\mathfrak{Cof}\,\vartheta) = \frac{1}{i\pi\sqrt{2}} \int_{-\vartheta}^{\vartheta} \frac{e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}\,d\alpha}{\sqrt{\mathfrak{Cof}\,\alpha - \mathfrak{Cof}\,\vartheta}}, \quad Q^{n}(\mathfrak{Cof}\,\vartheta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\vartheta}^{\infty} \frac{e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}\,d\alpha}{\sqrt{\mathfrak{Cof}\,\alpha - \mathfrak{Cof}\,\vartheta}}.$$

In derselben Weise ergiebt sich aber aus Gleichung (3)

(7 a) $$P^{n}(\mathfrak{Cof}\,\vartheta) = \frac{1}{i\pi\sqrt{2}} \int_{-\vartheta}^{\vartheta} \frac{e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}\,d\alpha}{\sqrt{\mathfrak{Cof}\,\alpha - \mathfrak{Cof}\,\vartheta}}.$$

Also gelten auch die Formeln

(7 b) $$P^{n}(\mathfrak{Cof}\,\vartheta) = \frac{1}{i\pi\sqrt{2}} \int_{-\vartheta}^{\vartheta} \frac{\mathfrak{Cof}\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha\,.\,d\alpha}{\sqrt{\mathfrak{Cof}\,\alpha - \mathfrak{Cof}\,\vartheta}}, \quad 0 = \int_{-\vartheta}^{\vartheta} \frac{\mathfrak{Sin}\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha\,.\,d\alpha}{\sqrt{\mathfrak{Cof}\,\alpha - \mathfrak{Cof}\,\vartheta}}.$$

c. Ähnliche Formeln treten auf, wenn $x = \cos\omega$, $0 < \omega < \frac{1}{2}\pi$, gesetzt wird. Es liegt dann nahe, die die Punkte $\xi = e^{-i\omega}$ und $1 : \xi = e^{i\omega}$ verbindende Sehne des Einheitskreises durch einen der beiden Bogen zu ersetzen, welche in denselben Punkten endigen.

Für den von $-\omega$ über $+1$ nach $+\omega$ führenden Bogen ist die angedeutete Vertauschung sicher erlaubt, weil in dem von Sehne und Bogen begrenzten Kreisabschnitt, der kleiner ist als der Halbkreis, kein kritischer Punkt der zu integrierenden Funktion liegt. Die Einführung von $u = e^{i\beta}$, $-\omega \leqq \beta \leqq \omega$, in die Gleichungen (3) und (5) verschafft uns für P die Formeln

(8) $$P^{n}(\cos\omega) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \int_{-\omega}^{\omega} \frac{e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)i\beta}\,d\beta}{\sqrt{\cos\beta - \cos\omega}} = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \int_{-\omega}^{\omega} \frac{e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)i\beta}\,d\beta}{\sqrt{\cos\beta - \cos\omega}}, \text{ oder}$$

(8 a) $$P^{n}(\cos\omega) = \frac{2}{\pi\sqrt{2}} \int_{0}^{\omega} \frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\beta\,.\,d\beta}{\sqrt{\cos\beta - \cos\omega}}, \quad 0 = \int_{-\omega}^{\omega} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\beta\,.\,d\beta}{\sqrt{\cos\beta - \cos\omega}}.$$

Für den von $-\omega$ über -1 nach $+\omega$ führenden Bogen des Einheitskreises dagegen ist die Vertauschung nicht gestattet, wenigstens so lange nicht, als n allgemein bleibt. Denn in diesem Falle liegt der kritische Punkt $u = 0$ im Inneren des Kreisabschnittes, der jetzt grösser als der Halbkreis ist. Der Nullpunkt hört aber auf Pol zu sein, wenn n eine positive ganze Zahl oder 0 ist. Unter dieser Voraussetzung liefert die Substitution $u = e^{i\beta}$, $\omega \leqq \beta \leqq 2\pi - \omega$, mit Rücksicht auf das Vorzeichen der Quadratwurzel

$$(9)\qquad P^n(\cos\omega)=\frac{1}{i\pi\sqrt{2}}\int\limits_{\omega}^{2\pi-\omega}\frac{e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)i\beta}\,d\beta}{\sqrt{\cos\omega-\cos\beta}}=\frac{1}{i\pi\sqrt{2}}\int\limits_{\omega}^{2\pi-\omega}\frac{e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)i\beta}\,d\beta}{\sqrt{\cos\omega-\cos\beta}},\ \text{oder}$$

$$(9\,a)\qquad P^n(\cos\omega)=\frac{2}{\pi\sqrt{2}}\int\limits_{\omega}^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\beta\,.\,d\beta}{\sqrt{\cos\omega-\cos\beta}},\quad 0=\int\limits_{\omega}^{2\pi-\omega}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\beta\,.\,d\beta}{\sqrt{\cos\omega-\cos\beta}}.$$

Die ersten der mit (8a) und (9a) bezeichneten Formeln sind diejenigen, welche Mehler (Mathem. Ann. Bd. 5 S. 141) für die Kugelfunktion erster Art aus den Formeln von Dirichlet abgeleitet hat.

Weniger einfach fällt die Umformung für die Kugelfunktion zweiter Art aus. Denn man erkennt aus (3) und (5), dass für $x=\cos\omega$ und $u=e^{\beta}$ die Integration von $\pm i\omega$ bis zu einem im Unendlichen liegenden, aber komplexen Werte, nämlich bis zu $\infty\pm\frac{1}{2}i\pi$ auf beliebigem Wege zu erstrecken ist. Nach Heine (II. S. 229) darf dafür das Integral von $\pm\omega$ bis 0 und dann von 0 bis ∞ genommen werden. Deshalb wird

$$Q^n(\cos\omega)=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\beta}\,d\beta}{\sqrt{\mathfrak{Cof}\,\beta-\cos\omega}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_{0}^{\omega}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\beta\,.\,d\beta}{\sqrt{\cos\beta-\cos\omega}}.$$

In entsprechender Weise aber findet sich durch die Substitution von $u=e^{-\beta}$

$$Q^n(\cos\omega)=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\beta}\,d\beta}{\sqrt{\mathfrak{Cof}\,\beta-\cos\omega}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_{0}^{\omega}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\beta\,.\,d\beta}{\sqrt{\cos\beta-\cos\omega}},$$

und daher folgt durch Addition beider Gleichungen

$$(10)\qquad Q^n(\cos\omega)=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\mathfrak{Cof}\left(n+\frac{1}{2}\right)\beta\,.\,d\beta}{\sqrt{\mathfrak{Cof}\,\beta-\cos\omega}}.$$

Aus den Formeln (7), (8), (10) ergeben sich auch mit überraschender Einfachheit Integrale für die Kegelfunktion. Beispielsweise wird für $n=-\frac{1}{2}\pm\mu i$ erhalten

$$(11)\qquad \mathfrak{K}^{\mu}(\mathfrak{Cof}\,\vartheta)=\frac{1}{i\pi\sqrt{2}}\int\limits_{-\vartheta}^{\vartheta}\frac{e^{\pm\mu i\alpha}\,d\alpha}{\sqrt{\mathfrak{Cof}\,\alpha-\mathfrak{Cof}\,\vartheta}},\quad \mathfrak{K}^{\mu}(\cos\omega)=\frac{1}{\pi\sqrt{2}}\int\limits_{-\omega}^{\omega}\frac{e^{\pm\mu\beta}\,d\beta}{\sqrt{\cos\beta-\cos\omega}}.$$

Nicht übertragbar sind die Formeln (9), weil diese nur für positive ganze Werte von n Geltung besitzen.

d. Merkwürdiger Weise ändern sich die Grenzen unserer Integrale für P in (3) und (5) nicht, falls für u eine neue Veränderliche durch die Gleichung

$$u\,{}^{+}_{(-)}\sqrt{1-2xu+u^2}=t$$

eingeführt wird. Setzen wir dann noch

$$t = x + \sqrt{x^2 - 1} \, . \, e^{i\varphi},$$

so bedeutet dies eine Integration über den Halbkreis, der den Verzweigungsschnitt zum Durchmesser hat. Werden beide Substitutionen zugleich ausgeführt, so ergiebt sich nach gehöriger Bestimmung der Grenzen, weil

$$u = x + \sqrt{x^2 - 1} \, . \, \cos\varphi \, , \quad \frac{du}{\sqrt{1 - 2xu + u^2}} = i d\varphi$$

ist, die Formel von Laplace

$$P^n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (x + \sqrt{x^2-1} \, . \, \cos\varphi)^n \, d\varphi = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{d\varphi}{(x + \sqrt{x^2-1} \, . \, \cos\varphi)^{n+1}} \, . \tag{12}$$

Auf ähnlichem Wege folgen aus den die Funktion Q darstellenden Integralen, wenn

in (3) $\qquad u = x - \sqrt{x^2-1} \, . \, \mathfrak{Cof}\, t, \; t_0 = \frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1},$

in (5) $\qquad u = x + \sqrt{x^2-1} \, . \, \mathfrak{Cof}\, t$

gesetzt wird, für jeden Wert von x, der einen positiven reellen Teil besitzt, die Gleichungen

$$Q^n(x) = \int_0^{t_0} (x - \sqrt{x^2-1} \, . \, \mathfrak{Cof}\, t)^n \, dt = \int_0^\infty \frac{dt}{(x + \sqrt{x^2-1} \, . \, \mathfrak{Cof}\, t)^{n+1}} \, . \tag{13}$$

e. Weiter mag in unseren Integralen (3) $u = -v$ gesetzt werden. Dadurch gewinnen wir die Formeln

$$P^n(-x) = (-1)^n \, . \, P^n(x) \, , \quad Q^n(-x) = (-1)^{n+1} \, . \, Q_1{}^n(x) \, , \tag{14}$$

wo Q_1 dieselbe Funktion bedeutet, welche bereits am Schlusse des zweiten Abschnittes in Gleichung (4) auftrat. Auch die Zerlegung dieser Funktion in einen reellen und einen imaginären Bestandteil bietet sich im Falle $x = \cos\omega$ fast von selbst dar. Denn eine einfache Zerlegung des Integrationsbereiches giebt das Resultat

$$Q_1{}^n(\cos\omega) = \int_0^{\cos\omega} \frac{u^n \, du}{\sqrt{1 - 2u\cos\omega + u^2}} - \frac{1}{2} i\pi \, P^n(\cos\omega), \tag{15}$$

während für $Q^n(\cos\omega)$ gefunden wird

$$Q^n(\cos\omega) = \int_0^{\cos\omega} \frac{u^n \, du}{\sqrt{1 - 2u\cos\omega + u^2}} + \frac{1}{2} i\pi \, P^n(\cos\omega). \tag{15 a}$$

f. Endlich sollen unter der Voraussetzung, dass n eine ganze Zahl vorstellt, die Integrale (3) durch Ausführung der Integration berechnet werden. Es ist

$$\frac{d}{du}\left\{u^{n-1}\sqrt{1 - 2xu + u^2}\right\} = \frac{(n-1)\,u^{n-2}}{\sqrt{1-2xu+u^2}} - \frac{(2n-1)\,xu^{n-1}}{\sqrt{1-2xu+u^2}} + \frac{nu^n}{\sqrt{1-2xu+u^2}}$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit du und integrieren unbestimmt, so erhalten wir als entsprechende Formel

$$\int \frac{u^n\,du}{\sqrt{1-2xu+u^2}} = \frac{1}{n}\,u^{n-1}\sqrt{1-2xu+u^2}$$
$$+\frac{2n-1}{n}\,x\int\frac{u^{n-1}\,du}{\sqrt{1-2xu+u^2}}-\frac{n-1}{n}\int\frac{u^{n-2}\,du}{\sqrt{1-2xu+u^2}},$$

eine Gleichung, deren Bau bereits an die Rekursionsformel (1) erinnert. Wenden wir dieselbe n mal hintereinander an, so folgt

$$(16)\qquad \int\frac{u^n\,du}{\sqrt{1-2xu+u^2}} = \sqrt{1-2xu+u^2}\sum_{\nu=1}^{\nu=n} G_\nu u^{n-\nu} + H\int\frac{du}{\sqrt{1-2xu+u^2}},$$

wo die Grössen G und H, die kein u enthalten, durch die folgenden Gleichungen gegeben werden:

$$n\,G_1 = 1,$$
$$(n-1)\,.\,G_2 = (2n-1)\,x\,.\,G_1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(n-\nu+1)\,.\,G_\nu = (2n-2\nu+3)\,x\,.\,G_{\nu-1} - (n-\nu+2)\,G_{\nu-2},$$
$$H = x\,.\,G_n - G_{n-1}.$$

Beispielsweise wird

$$G_1 = \frac{1}{n}$$
$$G_2 = \frac{2n-1}{n(n-1)}\,x, \qquad H_2^{(2)} = x\,.\,G_2^{(2)} - G_1^{(2)} = \frac{3}{2}\left(x^2-\frac{1}{3}\right),$$
$$G_3 = \frac{(2n-1)(2n-3)\,x^2-(n-1)^2}{n(n-1)(n-2)}, \qquad H_3^{(3)} = x\,.\,G_3^{(3)} - G_2^{(3)} = \frac{5}{2}\left(x^3-\frac{3}{5}\,x\right),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Wird noch $G_0 = 0$ gesetzt, so findet sich $H^{(1)} = x$. Während G_n eine ganze Funktion von x vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade ist, ist $H^{(n)}$ eine solche vom n^{ten} Grade.

Gehen wir nun in (16) von den unbestimmten Integralen zu den bestimmten über, indem wir das eine Mal die Grenzen $(x-\sqrt{x^2-1},\ x+\sqrt{x^2-1})$, das andere Mal $(0, x-\sqrt{x^2-1})$ zur Anwendung bringen, so erhalten wir, wenn der Einfachheit halber $\mathcal{M}(x) > 1$ vorausgesetzt wird,

$$(16\,\text{a})\qquad P^n(x) = \frac{H}{i\pi}\int_{x-\sqrt{x^2-1}}^{x+\sqrt{x^2-1}}\frac{du}{\sqrt{1-2xu+a^2}} = H,$$

$$(16\,\text{b})\qquad Q^n(x) = -G_n + H\int_0^{x-\sqrt{x^2-1}}\frac{du}{\sqrt{1-2xu+u^2}} = -G_n + \frac{1}{2}\,H\,.\,\log\frac{x+1}{x-1}.$$

Hieraus ergiebt sich die zuerst von Gauss[1]) aufgestellte Formel

$$(16\,\text{c})\qquad Q^n(x) = \frac{1}{2}\,P^n(x)\,.\,\log\frac{x+1}{x-1} - G_n.$$

[1]) Gauss: Methodus nova integr. val. etc. No. 18.

Die im gegenwärtigen Abschnitt gegebenen Umformungen der Kugelfunktionen lassen die Brauchbarkeit unserer Integrale deutlich erkennen. Nicht minder vorteilhaft erweisen sich die Integrale aber auch bei der Ableitung der Reihenentwickelungen, welche die Kugelfunktionen darstellen, und bei der Feststellung ihres Zusammenhanges mit der Differentialgleichung, der diese Funktionen genügen.

Wir müssen es uns versagen, diese Gebiete hier weiter zu erforschen. Jedenfalls haben wir durch die bisherigen Erörterungen zur Genüge gezeigt, dass zur Definition der Kugelfunktionen die Rekursionsformel völlig als hinreichend bezeichnet werden muss.

§ 4.

Die erzeugenden Funktionen.

Kehren wir zur Rekursionsformel der Kugelfunktionen

$$(n+2)\, R^{n+2}(x) - (2n+3)\, x\, R^{n+1}(x) + (n+1)\, R^{n}(x) = 0$$

zurück und denken uns n ganz und positiv, so liegt es nahe, die Grössen R^0, R^1, ... R^n als Koefficienten in der Entwickelung einer Funktion $\varphi(u) = \varphi(u, x)$ nach steigenden Potenzen von u anzusehen. Setzen wir also

$$\text{(a)} \qquad \varphi(u) = \sum_{n=0}^{n=\infty} R^n(x)\,.\,u^n,$$

so entsteht die Aufgabe, $\varphi(u)$, die erzeugende Funktion der Kugelfunktionen, aus der Differenzengleichung zu bestimmen. Es wird hierbei vorläufig immer anzunehmen sein, dass es eine solche Reihenentwickelung der Funktion $\varphi(u)$ überhaupt giebt, dass also die Reihe wenigstens innerhalb eines gewissen, auf u bezüglichen Bereiches konvergiere.

Wir folgen hier einer Methode, die wohl zuerst von Schlömilch [1]) angegeben worden ist und die Aufstellung einer Differentialgleichung zum Zweck hat, der die Funktion $\varphi(u)$ Genüge leisten muss.

Durch Multiplikation der Rekursionsformel mit u^n und Summation nach n von 0 bis ∞ erhalten wir die Gleichung

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \left\{ \frac{1}{u^2}(n+2)\, u^{n+2} R^{n+2} - \frac{1}{u}[1 + 2(n+1)]\, x u^{n+1} R^{n+1} + (1+n)\, u^n R^n \right\} = 0.$$

In dieser Gleichung ersetzen wir die Summen $\sum u^n R^n$ und $\sum n u^n R^n$ durch die aus (a) entnommenen Werte

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} u^n R^n = \varphi(u), \qquad \sum_{n=0}^{n=\infty} n u^n R^n = \frac{d\,\varphi(u)}{d \log u}.$$

Dadurch ergiebt sich nach einigen einfachen Umformungen zur Bestimmung der Funktion $\varphi(u)$ die Differentialgleichung

$$\text{(b)} \qquad (1 - 2xu + u^2)\frac{d\,\varphi(u)}{du} + (u - x)\,\varphi(u) = c, \qquad c = R^1 - x R^0.$$

[1]) Schlömilch: Theorie der Differenzen und Summen. Halle. 1848. M. vergl. auch die Abhandlung von Thomae im 14. Jahrg. der Zeitschrift für Mathematik und Physik, S. 365.

Ist zunächst $R^n(x) = P^n(x)$ so wird die Konstante $c = P^1(x) - x\,P^0(x) = 0$. Daher erhalten wir aus (b) als erzeugende Funktion der Kugelfunktion erster Art

$$\varphi_1(u) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xu + u^2}} + const,$$

oder, wenn die Konstante so bestimmt wird, dass $\varphi_1(u) = P^0(x) = 1$ für $u = 0$ ist,

(c) $$\varphi_1(u) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xu + u^2}}.$$

Soll dagegen $R^n(x) = Q^n(x)$ sein, so ist $c = Q^1(x) - x\,Q^0(x) = -1$ und daher

$$(1 - 2xu + u^2)\frac{d\varphi_2(u)}{du} + (u - x)\,\varphi_2(u) + 1 = 0.$$

Hieraus findet sich mit der Bestimmung, dass für $u = 0$ $\varphi_2(u) = Q^0(x) = \frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1}$ wird, schliesslich als erzeugende Funktion der Kugelfunktion zweiter Art

(d) $$\varphi_2(u) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xu + u^2}} \cdot \frac{1}{2}\log\frac{x - u + \sqrt{1 - 2xu + u^2}}{x - u - \sqrt{1 - 2xu + u^2}}.$$

Wir erhalten somit die beiden Gleichungen

(17a) $$\varphi_1(u) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xu + u^2}} = P^0(x) + P^1(x)\,.\,u + P^2(x)\,.\,u^2 + \ldots\ldots,$$

(17b) $$\varphi_2(u) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xu + u^2}} \cdot \frac{1}{2}\log\frac{x - u + \sqrt{1 - 2xu + u^2}}{x - u - \sqrt{1 - 2xu + u^2}} = Q^0(x) + Q^1(x)\,.\,u + Q^2(x)\,.\,u^2 + \ldots\ldots.$$

Es handelt sich nun um die Bestimmung der Konvergenzbedingungen der beiden Reihen. Was zunächst die Formel (17a) betrifft, so kann die linke Seite leicht auf die Form

$$[(1 - u\,.\,\xi)(1 - u : \xi)]^{-\frac{1}{2}}$$

gebracht werden, wenn wieder wie früher $x - \sqrt{x^2 - 1} = \xi$ gesetzt wird. Es muss also zu gleicher Zeit $\mathcal{M}(u) < \mathcal{M}(\xi)$ und $\mathcal{M}(u) < \mathcal{M}(1:\xi)$ sein, wenn die Reihe konvergieren soll. Ist nun x reell und kleiner als 1, so wird $\mathcal{M}(\xi) = \mathcal{M}(1:\xi) = 1$, und daher konvergiert die Potenzreihe (17a) innerhalb des Einheitskreises. Ist aber x reell und grösser als 1 oder komplex, so ist sicher $\mathcal{M}(\xi) < \mathcal{M}(1:\xi)$. Mithin ist der Radius des Konvergenzkreises in diesen beiden Fällen gleich $\mathcal{M}(\xi)$. Derselbe wird desto kleiner, je mehr x und somit auch $\mathcal{M}(x)$ wächst.

Entsprechendes gilt von der Reihe (17b), bei deren Ableitung x grösser als 1 vorausgesetzt und der Logarithmus reell gedacht wurde. Diese Formel besitzt aber, wie sich zeigen lässt, auch noch für beliebige Werte von x mit positivem reellen Teile Geltung, wenn nur bei der Bestimmung der Integrationskonstanten in Gleichung (b) für $u = 0$ in $\varphi_2(u)$ unter

$$Q^0(x) = \frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1}$$

derjenige Logarithmus verstanden wird, dessen imaginärer Teil zwischen $\pm\frac{1}{2}i\pi$ liegt. An den Grenzen $\pm\frac{1}{2}i\pi$ selbst ist das arithmetische Mittel aus beiden Ausdrücken zu nehmen. Man gelangt zu den verschiedenen Werten von $Q^0(x)$ durch die Annahme $x = \cos(\omega - i\vartheta)$. Da dann

$$\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{1}{2}} = -\,i\,ctg\,\frac{1}{2}(\omega - i\vartheta) = \frac{\mathfrak{Sin}\,\vartheta - i\sin\omega}{\mathfrak{Cos}\,\vartheta - \cos\omega},$$

so ergiebt sich

$$Q^0\,[\cos(\omega - i\vartheta)] = \frac{1}{2}\log\frac{\mathfrak{Sin}^2\vartheta + \sin^2\omega}{(\mathfrak{Cof}\,\vartheta - \cos\omega)^2} - i\,\mathrm{arc\,tg}\frac{\sin\omega}{\mathfrak{Sin}\,\vartheta},$$

den Bogen zwischen $\pm\frac{1}{2}\pi$ genommen. Ist $\vartheta = 0$, also x reell und kleiner als 1, so hat man

$$\frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1} = \log\mathrm{ctg}\frac{1}{2}\omega \mp \frac{1}{2}i\pi \text{ und daher } Q^0(\cos\omega) = \log\mathrm{ctg}\frac{1}{2}\omega,$$

für $\omega = \frac{1}{2}\pi$ dagegen, also für ein rein imaginäres $x = i\,\mathfrak{Sin}\,\vartheta$, falls der Bogen zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ angenommen wird,

$$Q^0(i\,\mathfrak{Sin}\,\vartheta) = -\,i\,\mathrm{arc\,ctg}\,\mathfrak{Sin}\,\vartheta.$$

Soll die Entwickelung der erzeugenden Funktion $\varphi_2(u)$ nach aufsteigenden Potenzen von u wirklich ausgeführt werden, so erscheint es zweckmässig, $\varphi_2(u)$ in die Form

$$\varphi_2(u) = \frac{1}{(x-u)\,.\,y}\,.\,\frac{1}{2}\log\frac{1+y}{1-y}, \qquad y = \frac{\sqrt{1-2xu+u^2}}{x-u},$$

zu bringen. Es treten dann bei der Entwickelung des Logarithmus nur ungerade Potenzen von y auf, und es verschwinden somit sämtliche Quadratwurzeln bei der Division durch y. Nur die negativen und ungeraden Potenzen von $(x-u)$ sind nach dem binomischen Lehrsatze zu entwickeln. Sammelt man darauf das in die Potenz u^n Multiplizierte, so wird für $Q^n(x)$ die nach absteigenden Potenzen von x geordnete Reihe

$$Q^n(x) = \frac{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,n}{1\,.\,3\,.\,5\,\ldots\,(2n+1)}\,x^{-n-1}\,F\left(\frac{n+1}{2}, \frac{n+2}{2}, \frac{2n+3}{2}, x^{-2}\right) \tag{18}$$

erhalten, eine Gleichung, die sich auch mit Leichtigkeit aus den Integralformeln (3) oder (5) ableiten lässt.

Die Ausführung dieser Entwickelung setzt voraus, dass nicht nur $\mathcal{M}(u) < \mathcal{M}(x)$ ist, sondern auch, dass der absolute Wert von y zwischen ± 1 liegt. Da ausserdem die Möglichkeit, die Glieder zu ordnen, dargethan werden muss, so ist die Ableitung der Konvergenzbedingungen der Reihe (17 b) auf diesem Wege mit einigen Schwierigkeiten verknüpft. Es empfiehlt sich dagegen folgendes Verfahren.

Die Reihe (17 b) konvergiert offenbar und zwar stärker als eine geometrische, wenn

$$\mathcal{M}(u) < \mathcal{M}(r) \text{ und } r = \left\{\frac{Q^n(x)}{Q^{n+1}(x)}\right\}_{n=\infty}$$

ist. Um diesen Grenzwert zu finden, gehen wir auf das Integral (3)

$$Q^n(x) = \int_0^\xi \frac{u^n\,du}{\sqrt{1-2xu+u^2}} = \int_0^\xi u^n(1-u\xi)^{-\frac{1}{2}}(1-u:\xi)^{-\frac{1}{2}}\,du$$

zurück und transformieren es durch die Substitution $u = \xi(1-v)$. Das erhaltene Integral setzen wir gemäss der Formel

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x) = \frac{\Pi(\gamma-1)}{\Pi(\beta-1)\,\Pi(\gamma-\beta-1)}\int_0^1 v^{\beta-1}(1-v)^{\gamma-\beta-1}(1-xv)^{-\alpha}\,dv$$

in eine hypergeometrische Reihe um. Dadurch folgt

$$(19) \qquad Q^n(x) = \frac{\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)\Pi(n)}{\Pi\left(n+\frac{1}{2}\right)} \frac{\xi^{n+1}}{\sqrt{1-\xi^2}} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, n+\frac{3}{2}, \frac{\xi^2}{\xi^2-1}\right).$$

Diese Formel ist zu einem Übergang zur Grenze für ins Unendliche wachsende n sehr geeignet. Denn dividieren wir $Q^n(x)$ durch $Q^{n+1}(x)$, so erhalten wir nach einer einfachen Umformung des numerischen Faktors für $n = \infty$, weil die Reihen sich auf ihr Anfangsglied zurückziehen, $r = 1 : \xi$. Demnach konvergiert die Reihe (17 b) für alle Werte von u, welche innerhalb eines Kreises mit dem Radius $\mathcal{M}(1 : \xi)$ liegen.

In gleicher Weise lässt sich die Rekursionsformel der Kugelfunktionen auch durch Reihen integrieren, die nach absteigenden Potenzen von u geordnet sind. Man findet durch die Annahme

$$\psi(u) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{R^n(x)}{u^{n+1}}$$

$$(20\,a) \qquad \psi_1(u) = \frac{1}{\sqrt{1-2xu+u^2}} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{P^n(x)}{u^{n+1}},$$

$$(20\,b) \qquad \psi_2(u) = \frac{1}{\sqrt{1-2xu+u^2}} \cdot \frac{1}{2} \log \frac{xu-1+\sqrt{1-2xu+u^2}}{xu-1-\sqrt{1-2xu+u^2}} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{Q^n(x)}{u^{n+1}}$$

Diese Reihen lassen sich auch aus den Formeln (17 a) und (17 b) durch die Substitution $u = \frac{1}{u}$ herleiten und sind bezüglich ihrer Konvergenz entsprechenden Bedingungen unterworfen.

§ 5.

Folgerungen.

Wir benutzen jetzt die erzeugenden Funktionen zur Ableitung einiger weiteren Eigenschaften der Kugelfunktionen.

(a) Zunächst bemerken wir, dass nach einem fundamentalen Satze von Cauchy aus der Theorie der Potenzreihen die in den Formeln (17 a) und (20 a) enthaltenen Entwickelungen hinsichtlich der Koefficienten $P^n(x)$ wesentlich gleichbedeutend sind mit unseren unter (5) und (3) aufgestellten Integralen. Denn die Koefficienten der Reihen

$$\varphi_1(u) = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + \ldots . \text{ und } \psi_1(u) = \frac{b_0}{u} + \frac{b_1}{u^2} + \ldots . .$$

werden bekanntlich durch die Gleichungen

$$(21) \qquad a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{(R} \frac{\varphi_1(u)\,du}{u^{n+1}} \quad \text{und } b_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{r)} u^n \psi_1(u)\,du$$

gegeben, wenn die Integrationen im positiven Sinne über einen um den Nullpunkt beschriebenen Kreis erstreckt werden, innerhalb oder ausserhalb desselben die Funktionen $\varphi_1(u)$ und $\psi_1(u)$ endlich, stetig und eindeutig sind. Nun war aber der Integrationsweg für das Integral, welches

$2\,i\pi\,P^n(x)$ darstellt, ursprünglich eine beliebige geschlossene Kurve, die beide Verzweigungspunkte $u=\xi$ und $u=1:\xi$ rechtläufig umgiebt. Offenbar können wir dieselbe, wenn n ganz und positiv ist, einmal durch einen Kreis ersetzen, dessen Mittelpunkt der Anfangspunkt und dessen Radius R grösser ist als $\mathcal{M}(1:\xi)$, das andere Mal aber durch einen ebensolchen Kreis, dessen Radius r kleiner ist als $\mathcal{M}(\xi)$. Dabei ist bei einer bestimmten Wahl des Blattes der u-Fläche nur darauf zu achten, dass über das Vorzeichen der Quadratwurzel passend verfügt wird. Ein Kreis mit dem Radius $r=\mathcal{M}(\xi)$ muss dann angesehen werden als eine Kurve, die als Begrenzung des äusseren Teiles der u-Fläche den Verzweigungsschnitt rückläufig einschliesst. Da $\varphi_1(u)=\psi_1(u)$ ist, so ist in jedem Falle

(21a) $$a_n = P^n(x) = b_n.$$

Ähnliche Betrachtungen lassen sich für $Q^n(x)$ anstellen.

(b) Ferner ergiebt sich aus (17a) und (17b) mit Anwendung des Satzes von Mac Laurin sofort eine Darstellung der Kugelfunktionen als höhere Differentialquotienten. Man erhält nämlich

(22) $$P^n(x)=\frac{1}{\Pi(n)}\left\{\frac{d^n\varphi_1(u)}{du^n}\right\}_{u=0}, \quad Q^n(x)=\frac{1}{\Pi(n)}\left\{\frac{d^n\varphi_2(u)}{du^n}\right\}_{u=0}.$$

Die erste dieser Gleichungen lässt sich ohne viele Mühe in die Formel von Rodrigues

(22a) $$P^n(x)=\frac{1}{\Pi(n)}\,\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{x^2-1}{2}\right)^n$$

überführen, die aber auch und mit grösserer Eleganz gefunden wird, indem man diejenige Wurzel w der Gleichung

$$w = x + u\,\frac{w^2-1}{2},$$

welche für $u=0$ zu x wird, mit Hilfe der Formel von Lagrange [1]) nach steigenden Potenzen von u entwickelt.

(c) Für $\mathcal{M}(x) > 1$ lässt sich die erzeugende Funktion der Q durch das Integral

(23) $$\varphi_2(u)=\int\limits_{1+u}^{1-u}\frac{dy}{(1-2xu+u^2)-y^2}=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}\frac{dz}{(x-z)\sqrt{1-2zu+u^2}}$$

ersetzen. Substituiert man hier für die Wurzel ihren Wert aus (17a), so kann man, da die Reihe gleichmässig konvergent ist und die Integrationsgrenzen innerhalb des Konvergenzgebietes liegen, gliedweise integrieren. Durch Vergleichung der $n^{\underline{\text{ten}}}$ Potenzen von u in den gleichzeitig konvergierenden Reihen findet sich dann die Formel von F. Neumann

(23a) $$Q^n(x)=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}\frac{P^n(z)\,dz}{x-z}.$$

(d) Weiter besteht zwischen den beiden erzeugenden Funktionen $\varphi_1(u)$ und $\varphi_2(u)$ die Beziehung

[1]) M. vergl. Briot et Bouquet: Théorie des Fonctions elliptiques. Paris. 1875. p. 156.

$$\varphi_2(u) = \frac{1}{\sqrt{1-2xu+u^2}} \int_u^\xi \frac{du}{\sqrt{1-2xu+u^2}} = \varphi_1(u) \int_u^\xi \varphi_1(u)\, du\,.$$

Wir ersetzen wiederum $\varphi_1(u)$ durch die Reihe (17a). Da dann immer $\mathcal{M}(u) < \mathcal{M}(\xi)$ sein muss, der Integrationsweg also ganz innerhalb des Konvergenzkreises liegt, so kann wie unter (c) an Stelle des Integrales der Summe die Summe der Integrale der einzelnen Posten treten. Bedenken könnte nur der Umstand erregen, dass die obere Grenze auf dem Konvergenzkreise selbst liegt, wo die Potenzreihe in eine Fourier'sche Reihe übergeht. Man wird deshalb das Integral zunächst von u bis zu einem innerhalb des Kreises sehr nahe an ξ liegenden Punkte $(\xi - \varepsilon)$ nehmen. Dann sinkt das Restintegral mit abnehmendem ε unter jeden beliebigen Grad der Kleinheit herab, und wir erhalten somit das Resultat

$$\int_u^\xi \varphi_1(u)\, du = V - W, \qquad V = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{P^n(x)\,.\,\xi^{n+1}}{n+1}, \qquad W = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{P^n(x)\,.\,u^{n+1}}{n+1}\,.$$

Da nun die Reihen für W und $\varphi_1(u)$ unbedingt konvergieren, so konvergieren auch die Reihen der Moduln ihrer einzelnen Terme. Demnach lässt sich ihr Produkt nach Potenzen von u ordnen. Die so entstandene Reihe ist mit der Reihe in (17b) für solche u, für welche $\mathcal{M}(u) < \mathcal{M}(\xi)$ ist, gleichzeitig konvergent. Unter dieser Voraussetzung ergeben sich die Formeln

$$(24)\qquad \begin{aligned} Q^0(x) &= V = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{n+1} P^n(x)\,.\,(x - \sqrt{x^2-1})^{n+1}, \qquad Q^1(x) = x\,Q^0(x) - 1\,, \\ Q^n(x) &= P^n(x)\,.\,Q^0(x) - \sum_{m=1}^{m=n} \frac{1}{m} P^{m-1}(x)\,.\,P^{n-m}(x)\,. \end{aligned}$$

Ein Vergleich der letzten Formel mit der Gleichung (16c) zeigt, dass die dort G_n genannte ganze Funktion von x in eine Reihe entwickelbar ist, die nach Produkten zweier Kugelfunktionen erster Art fortschreitet.

(e) Ähnliche Reihen werden erhalten, wenn in den Integralen

$$P^n(x) = \frac{1}{i\pi} \int_\xi^{1:\xi} \frac{u^n\, du}{\sqrt{1-2xu+u^2}}\,, \quad Q^n(x) = \int_0^\xi \frac{u^n\, du}{\sqrt{1-2xu+u^2}}$$

die Quadratwurzel durch die ihr gleiche Reihe ersetzt wird. Besonders bemerkenswerte Formeln bieten sich dar, falls $x = \cos\omega$, $0 < \omega < \frac{1}{2}\pi$, ist. Da dann die Reihe für P in einem Kreise konvergiert, dessen Radius 1 ist, so kann als Integrationsweg ein Kreisbogen mit dem Radius $(1 - \varepsilon)$ gewählt werden, der in unmittelbarer Nähe der Punkte $e^{-i\omega}$ und $e^{i\omega}$ endigt. Beim Übergang zur Grenze für verschwindende ε folgt dann sofort

$$(25\text{a})\qquad P^n(\cos\omega) = \frac{1}{i\pi} \sum_{m=0}^{m=\infty} P^m(\cos\omega) \int_{e^{-i\omega}}^{e^{i\omega}} u^{n+m}\, du = \frac{2}{\pi} \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{P^m(\cos\omega)}{n+m+1} \sin(n+m+1)\,\omega\,.$$

Ebenso hat man für $Q^n(\cos\omega)$ bei Beachtung ähnlicher Vorsichtsmassregeln die Formel

(25 b)

$$Q^n(\cos\omega) = \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{P^m(\cos\omega)}{n+m+1} e^{-(n+m+1)i\omega} = \frac{P^0.\cos(n+1)\omega}{n+1} + \frac{P^1.\cos(n+2)\omega}{n+2} + \ldots - \frac{i\pi}{2} P^n(\cos\omega).$$

Im besonderen Falle $n = 0$ stimmt diese Gleichung mit der ersten Formel in (24) überein.

§ 6.

Die zweite Lösung der Differenzengleichung als bestimmte Summe.

Der Inhalt dieses Abschnittes bildet eine Anwendung des Satzes [1]), dass sich aus einem gegebenen Integral einer linearen Differenzengleichung zweiter Ordnung ein zweites Integral durch eine einfache Summation finden lässt. Ist nämlich Z^n irgend eine Lösung der Rekursionsformel

$$(n+2)\, Z^{n+2} - (2n+3)\, x\, Z^{n+1} + (n+1)\, Z^n = 0,$$

so erhält man, da auch $P^n(x)$ dieser Gleichung genügt, also

$$(n+2)\, P^{n+2} - (2n+3)\, x\, P^{n+1} + (n+1)\, P^n = 0$$

ist, durch Elimination der den Faktor x enthaltenden Glieder

(a) $$(n+2)\left[P^{n+2} Z^{n+1} - P^{n+1} Z^{n+2}\right] + (n+1)\left[P^n Z^{n+1} - P^{n+1} Z^n\right] = 0.$$

Setzt man nun

$$P^n Z^{n+1} - P^{n+1} Z^n = S^n,$$

so ist

$$P^{n+2} Z^{n+1} - P^{n+1} Z^{n+2} = -\Delta S^n - S^n,$$

und daher genügt infolge von (a) S^n der Differenzengleichung erster Ordnung

(b) $$(n+2)\, \Delta S^n + S^n = 0.$$

Also wird, wenn man von in n periodischen Funktionen absieht,

(c) $$S^n = P^n Z^{n+1} - P^{n+1} Z^n = \frac{c}{n+1},$$

falls c eine nach n konstante Grösse vorstellt. Nun ist

$$P^{n+1} = \Delta P^n + P^n, \quad Z^{n+1} = \Delta Z^n + Z^n,$$

ausserdem aber auch

$$\Delta\left(\frac{Z^n}{P^n}\right) = \frac{P^n \Delta Z^n - Z^n \Delta P^n}{P^n\left(\Delta P^n + P^n\right)} = \frac{P^n Z^{n+1} - P^{n+1} Z^n}{P^n P^{n+1}}.$$

Mithin ist

$$\Delta\left(\frac{Z^n}{P^n}\right) = \frac{c}{(n+1)\, P^n P^{n+1}}$$

[1]) Vergl. Crelle: Journal f. Mathem. Bd. 34. S. 328.

oder nach der Erklärung der bestimmten Summe

(d)
$$\frac{Z^n}{P^n} - \frac{Z^0}{P^0} = \sum_0^{n-1} \frac{c}{(n+1) P^n P^{n+1}}.$$

Soll nun die zweite Lösung Z^n mit der Kugelfunktion $Q^n(x)$ übereinstimmen, so muss der Konstanten c in (c) ein solcher Wert zuerteilt werden, dass für $n = 0$

$$S^0 = P^0(x)\, Q^1(x) - P^1(x)\, Q^0(x) = c$$

ist. Also ist $c = -1$, und es gilt die Formel

(26)
$$Q^n(x) = P^n(x) \left\{ Q^0(x) - \sum_0^{n-1} \frac{1}{(n+1) P^n(x) P^{n+1}(x)} \right\}$$

$$= P^n(x) \left\{ \frac{1}{2} \log \frac{x+1}{x-1} - \frac{1}{P^0(x) P^1(x)} - \frac{1}{2 P^1(x) P^2(x)} - \ldots\ldots - \frac{1}{n P^{n-1}(x) P^n(x)} \right\}.$$

In dieser Formel muss zunächst $\mathcal{M}(x) > 1$ angenommen werden. Offenbar aber gilt dieselbe Formel auch für andere Werte von x, wenn nur Q^0 dem Früheren entsprechend definiert wird. Zugleich bemerken wir, dass durch (26) wiederum eine merkwürdige Entwickelung der ganzen Funktion G_n in (16c) geliefert wird.

Wir lassen jetzt n über alle Grenzen wachsen und haben deshalb den Grenzwert des Quotienten $\dfrac{Q^n(x)}{P^n(x)}$ aufzusuchen. Man erkennt aus (19), dass für $\mathcal{M}(\xi) < 1$

(27a)
$$Q^n(x)_{n=\infty} = \sqrt{\frac{\pi}{n}} \cdot \frac{\xi^{n+1}}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

gesetzt werden darf. Eine ähnliche Betrachtung des Integrals für $P^n(x)$ in (3) liefert unter derselben Annahme

(27b)
$$P^n(x)_{n=\infty} = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \cdot \frac{\xi^{-n}}{\sqrt{1-\xi^2}}.$$

Daher wird für $n = \infty$ der Quotient

(27c)
$$\left\{ \frac{Q^n(x)}{P^n(x)} \right\}_{n=\infty} = \pi \,.\, \xi^{2n+1},$$

strebt also der Grenze 0 zu. Unter der Voraussetzung, dass x reell und grösser als 1 oder komplex ist, ergiebt sich demnach aus (26) die Formel

(28a)
$$Q^0(x) = \frac{1}{2} \log \frac{x+1}{x-1} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{(n+1) P^n(x) P^{n+1}(x)},$$

aus welcher endlich mit Benutzung derselben Gleichung (26) die Beziehung fliesst

(28b)
$$Q^n(x) = P^n(x) \sum_{n=n}^{n=\infty} \frac{1}{(n+1) P^n(x) P^{n+1}(x)}.$$

§ 7.

Summation von Reihen, welche nach Kugelfunktionen fortschreiten.

Die Aufgabe, eine beliebige Funktion $F(x)$, die in einem gegebenen Bereiche den Bedingungen der Stetigkeit genügt, durch eine nach Kugelfunktionen fortschreitende Reihe darzustellen, ist in allen Fällen, das Argument x mag reell oder komplex sein, durch die Untersuchungen von Dirichlet und von Neumann vollständig gelöst. Ist

$$F(x) = \sum A_n P^n(x),$$

so werden die Entwickelungskoefficienten A_n durch Integrale angegeben, in denen die zu integrierende Funktion das Produkt aus $F(x)$ in eine Kugelfunktion vorstellt. Diese Integrale sind aber in vielen Fällen schwer zu berechnen.

Man hat deshalb zu neuen Hilfsmitteln gegriffen, die in speciellen Fällen oft mit Vorteil angewandt werden können. So wird z. B. durch die Rekursionsformel der Kugelfunktionen selbst das Mittel gegeben, aus der Entwickelung einer Funktion $F(x)$ diejenige des x-fachen Wertes der Funktion abzuleiten. Es ist auch bekannt, auf welche Weise sich aus der Entwickelung von $F(x)$ diejenige der integrierten oder differentiierten Funktion finden lässt.

Hier wird ein neuer Weg eingeschlagen, der gleichsam die Umkehrung der allgemeinen Aufgabe zum Ziele hat, indem nach Kugelfunktionen fortlaufende, endliche oder unendliche Reihen, deren Koefficienten ein gewisses Gesetz befolgen, durch bestimmte Integrale summiert werden.

Wenn nämlich eine beliebige Funktion $f(u)$ der komplexen Veränderlichen u in eine nach steigenden oder fallenden Potenzen geordnete Reihe entwickelt werden kann, so liefert eine einzige Integration in jedem Falle eine nach Kugelfunktionen erster oder zweiter Art fortlaufende Entwickelung, deren Konvergenz von dem Radius des Konvergenzkreises der Reihe $f(u)$ abhängig ist.

I. Die Funktion $f(u)$ sei innerhalb eines mit dem Radius R um den Nullpunkt beschriebenen Kreises endlich, stetig und eindeutig. Dann ist immer

$$f(u) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n u^n,$$

(29)

$$A_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{(r)} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{i\vartheta}) \cdot e^{-ni\vartheta} d\vartheta = \frac{f^{(n)}(0)}{\Pi(n)}, \qquad r < R.$$

Diese Gleichung multiplizieren wir nun mit

$$\frac{1}{i\pi} \frac{du}{\sqrt{1-2xu+u^2}} \quad \text{oder} \quad \frac{du}{\sqrt{1-2xu+u^2}},$$

die Quadratwurzel mit positivem Zeichen genommen, und integrieren hierauf zwischen den Grenzen

$$\xi = x - \sqrt{x^2-1} \text{ und } 1:\xi = x + \sqrt{x^2-1} \quad \text{oder} \quad 0 \text{ und } \xi = x - \sqrt{x^2-1}.$$

Die Integration der rechten Seite kann gliedweise geschehen, wofern x solche Werte besitzt, für welche die Punkte ξ und $1:\xi$ innerhalb des Konvergenzkreises der Reihe liegen. Ausserdem ist erforderlich, dass auch der Integrationsweg ganz im Innern des Konvergenzkreises verläuft. Dabei bleibt der Integrationsweg selbst für die Grenzen ξ, $1:\xi$ beliebig; für die Grenzen 0, ξ dagegen muss ein Weg w von der Beschaffenheit gewählt werden, dass der Punkt $1:\xi$ nicht innerhalb der geschlossenen Kontur liegt, welche von der von 0 nach ξ gezogenen Geraden und dem Wege w

gebildet wird. Mit Rücksicht auf die Formeln (3) entspringen dann, wofern die Integrale überhaupt nicht ohne Bedeutung sind, die Beziehungen

(29a)
$$F(x)=\frac{1}{i\pi}\int_{x-\sqrt{x^2-1}}^{x+\sqrt{x^2-1}}\frac{f(u)\,du}{\sqrt{1-2xu+u^2}}=\sum_{n=0}^{n=\infty}A_n P^n(x),$$
$$\Phi(x)=\int_0^{x-\sqrt{x^2-1}}\frac{f(u)\,du}{\sqrt{1-2xu+u^2}}=\sum_{n=0}^{n=\infty}A_n Q^n(x).$$

Diese Gleichungen können mittels der Substitutionen
$$u=x\underset{(+)}{-}\sqrt{x^2-1}\cos\varphi \quad \text{und} \quad u=x-\sqrt{x^2-1}\,\mathfrak{Cof}\,t,$$
falls $\frac{1}{2}[\log(x+1)-\log(x-1)]=t_0$ gesetzt wird, auf folgende einfachere Form gebracht werden:

(29b)
$$F(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x\underset{(+)}{-}\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)\,d\varphi=\sum_{n=0}^{n=\infty}A_n P^n(x),$$
$$\Phi(x)=\int_0^{t_0}f(x-\sqrt{x^2-1}\,\mathfrak{Cof}\,t)\,dt=\sum_{n=0}^{n=\infty}A_n Q^n(x).$$

Hinsichtlich ihrer Konvergenz sind die Reihen in (29a oder (29b) folgenden Bedingungen unterworfen:

1) Die nach Kugelfunktionen erster Art fortschreitende Reihe konvergiert, und zwar unbedingt, für alle Werte von x, die reell und grösser als 1 oder komplex sind, falls $\mathcal{M}(1:\xi)<R$. Denn in diesem Falle ist auch $\mathcal{M}(\xi)<R$. Ist x reell und kleiner als 1, also $x=\cos\omega$, $0<\omega<\frac{1}{2}\pi$, so sind beide Moduln einander gleich, und die Bedingung lautet $1<R$.

2) Die nach Kugelfunktionen zweiter Art fortschreitende Reihe konvergiert unbedingt, wenn $\mathcal{M}(\xi)<R$. Ausserdem ist zu beachten, was S. 14 und 15 über die Bestimmung der oberen Grenze $t_0=Q^0(x)$ für die verschiedenen Werte von x gesagt worden ist.

II. Ist die Funktion $f(u)$ ausserhalb eines mit dem Radius r um den Nullpunkt beschriebenen Kreises endlich, stetig und eindeutig, und verschwindet $f(r_1 e^{i\vartheta})$ für $r_1=\infty$, so kann dieselbe nach absteigenden Potenzen von u entwickelt werden. Also ist

(30)
$$f(u)=\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{B_n}{u^{n+1}},$$
$$B_n=\frac{1}{2i\pi}\int_{(r)}f(z)\,z^n\,dz=\frac{r^{n+1}}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(re^{i\vartheta})\,e^{(n+1)i\vartheta}\,d\vartheta.$$

Die Anwendung der Integrale in (5) liefert dann entsprechende Formeln, nämlich

(30 a)
$$F(x) = \frac{1}{i\pi} \int_{x - \sqrt{x^2 - 1}}^{x + \sqrt{x^2 - 1}} \frac{f(u)\,du}{\sqrt{1 - 2xu + u^2}} = \sum_{n=0}^{n=\infty} B_n P^n(x),$$
$$\Phi(x) = \int_{x + \sqrt{x^2 - 1}}^{\infty} \frac{f(u)\,du}{\sqrt{1 - 2xu + u^2}} = \sum_{n=0}^{n=\infty} B_n Q^n(x).$$

Diese Integrale können durch die Substitutionen

$$u = x \underset{(-)}{+} \sqrt{x^2 - 1}\cos\varphi \quad \text{und} \quad u = x + \sqrt{x^2 - 1}\,\mathfrak{Cof}\,t$$

auf die Form gebracht werden

(30 b)
$$F(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x \underset{(-)}{+} \sqrt{x^2 - 1}\cos\varphi)\,d\varphi = \sum_{n=0}^{n=\infty} B_n P^n(x),$$
$$\Phi(x) = \int_0^{\infty} f(x + \sqrt{x^2 - 1}\,\mathfrak{Cof}\,t)\,dt = \sum_{n=0}^{n=\infty} B_n Q^n(x),$$

wobei $\mathcal{M}(\xi) > r$, beziehungsweise $\mathcal{M}(1 : \xi) > r$ angenommen werden muss.

III. Es mag gestattet sein, die Brauchbarkeit der Formeln an einigen einfachen Beispielen zu erläutern.

a. Es sei zunächst $f(u) = e^u$. Dann ist für jedes endliche u

$$f(u) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{u^n}{n!}.$$

Daher wird

$$F(x) = \frac{1}{i\pi} \int_{x - \sqrt{x^2 - 1}}^{x + \sqrt{x^2 - 1}} \frac{e^u\,du}{\sqrt{1 - 2xu + u^2}} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{P^n(x)}{n!}.$$

Nun ist

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{x - \sqrt{x^2 - 1}\cos\varphi}\,d\varphi = \frac{1}{\pi} e^x \int_0^{\pi} e^{-i\sqrt{1 - x^2}\cos\varphi}\,d\varphi = e^x \cdot J^0(\sqrt{1 - x^2}),$$

wo das Zeichen J die Cylinderfunktion erster Art bezeichnet. Setzt man noch $x = \cos\omega$, so entspringt die Formel

(31)
$$e^{\cos\omega} J^0(\sin\omega) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{P^n(\cos\omega)}{n!}.$$

b. Die binomische Reihe

$$f(u) = \frac{1}{(1-u)^m} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\Pi(m+n-1)}{\Pi(n)\,\Pi(m-1)} u^n$$

konvergiert innerhalb eines Kreises, dessen Radius gleich 1 ist. Also wird die Reihe

$$\Phi(x) = \int_0^{x-\sqrt{x^2-1}} \frac{du}{(1-u)^m \sqrt{1-2xu+u^2}} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\Pi(m+n-1)}{\Pi(n)\,\Pi(m-1)} Q^n(x)$$

konvergent sein, falls $\mathcal{M}(\xi) < 1$ ist, d. h. in der ganzen Ebene, wofern x reell und grösser als 1 oder komplex ist. Das Integral lässt sich ausführen, wenn m ganz ist. Ist z. B. $m = 2$, so ergiebt sich das Resultat

$$(32) \qquad \sum_{n=0}^{n=\infty} (n+1)\, Q^n(x) = \frac{1}{2(x-1)} \left\{ 1 + \sqrt{\tfrac{1}{2}(x-1)}\,.\,\arccos \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \right\}.$$

c. Die Formeln (29) oder (30) sind auch zur Ableitung von solchen Entwickelungen geeignet, die nach Produkten von Kugelfunktionen fortschreiten. Man hat den früheren Betrachtungen nur solche Reihen zu Grunde zu legen, deren allgemeine Glieder von der Form

$$A_n P^n(x)\,.\,u^n \quad \text{oder} \quad A_n Q^n(x)\,.\,u^n$$

sind. Zwei derartige Formeln kennen wir bereits in (17a) und (17b). Differentiieren wir beispielsweise (17a) nach u, so folgt

$$\frac{x-u}{\sqrt{1-2xu+u^2}^{\,3}} = \sum_{n=0}^{n=\infty} n u^{n-1} P^n(x).$$

Wir multiplizieren mit $2u$ und addieren die neue Gleichung zu (17a). Dadurch entsteht die Reihe

$$\frac{1-u^2}{\sqrt{1-2xu+u^2}^{\,3}} = \sum_{n=0}^{n=\infty} (2n+1)\, u^n P^n(x).$$

Dieselbe ist in betreff ihrer Gültigkeit an dieselbe Bedingung geknüpft wie die Reihe (17a), deren Konvergenzkreis den Radius $R = \mathcal{M}(\xi)$ besass. Wenn wir daher die Gleichung mit der positiven Grösse

$$\frac{du}{\sqrt{1-2yu+u^2}}$$

multiplizieren und zwischen den Grenzen 0 und $(y - \sqrt{y^2-1})$ integrieren, so wird diese Operation erlaubt sein, wenn auch die neue Bedingung $\mathcal{M}(y - \sqrt{y^2-1}) < R$ erfüllt ist. Also erhalten wir unter der Voraussetzung

$$\mathcal{M}(y - \sqrt{y^2-1}) < \mathcal{M}(x - \sqrt{x^2-1})$$

$$\int_0^{y-\sqrt{y^2-1}} \frac{(1-u^2)\,du}{\sqrt{1-2xu+u^2}^{\,3}\sqrt{1-2yu+u^2}} = \sum_{n=0}^{n=\infty} (2n+1)\, P^n(x)\, Q^n(y)$$

oder nach Ausführung der Integration die wichtige Formel, mit welcher Heine in seinem Handbuch die Kugelfunktion zweiter Art zur Einführung bringt,

$$\frac{1}{y - x} = \sum_{n=0}^{n=\infty} (2n+1)\, P^n(x)\, Q^n(y). \tag{33}$$

Diese Formel ist, wie Herr C. Neumann gezeigt hat, immer anwendbar, wenn sich der Punkt x innerhalb einer durch den Punkt y gehenden Ellipse mit den Brennpunkten ± 1 befindet.

Andere nach Produkten von Kugelfunktionen fortschreitende Reihen geben weniger einfache Summen. Sie führen meist auf elliptische Integrale. Auch hierfür endlich möge ein einfaches Beispiel Platz finden.

Aus Formel (17a) folgt auf dem mehrfach angedeuteten Wege ohne weiteres die Gleichung

$$\int_0^{y-\sqrt{y^2-1}} \frac{du}{\sqrt{1-2xu+u^2}\,\sqrt{1-2yu+u^2}} = \sum_{n=0}^{n=\infty} P^n(x)\, Q^n(y),$$

deren linke Seite ein elliptisches Integral der ersten Gattung vorstellt. Um dasselbe wenigstens für den Fall, dass sämtliche Wurzeln des Radikals reell sind, also x und y reell und grösser als 1, ausserdem aber $x < y$ ist, auf die Normalform zu bringen, führen wir durch die Gleichung

$$u = \frac{z\sqrt{y+1} - \sqrt{y-1}}{z\sqrt{y+1} + \sqrt{y-1}},$$

die Wurzeln positiv genommen, eine neue Veränderliche z ein. Wir erhalten dann, falls zur Abkürzung

$$\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^{\frac{1}{2}} = z_0, \qquad arc\sin z_0 = \varphi_0, \qquad k^2 = \frac{(x-1)(y+1)}{(x+1)(y-1)}$$

gesetzt wird und φ_0 zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ liegt, die Formel

(34)

$$\int_{z_0}^{1} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = \int_{\varphi_0}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = K - F(\varphi_0, k) = \sqrt{(x+1)(y-1)} \sum_{n=0}^{n=\infty} P^n(x)\, Q^n(y).$$

Zum Schluss mag bemerkt werden, dass die Gesetze der Differenzenrechnung auch bei den Rekursionsformeln der zugeordneten Kugelfunktionen und der verwandten Funktionen gute Dienste leisten. Die Behandlung dieser Aufgaben muss einer späteren Gelegenheit vorbehalten bleiben.



